

10 класс

Общие принципы оценивания работ приведены в таблице.

баллы	правильность (ошибочность) решения
7	полное верное решение
6-7	верное решение с небольшими недочетами, не влияющими на решение
5-6	решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений и дополнений
2-3	доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	решение неверное, продвижения отсутствуют
0	решение отсутствует

1. Даны два отрезка длины 1 и $\sqrt{2} + \sqrt{5}$. Можно ли с помощью циркуля и линейки без делений построить отрезок длины $\sqrt{6}$?

Решение. Да, можно. Приведем этапы построения:

1) Построим равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом $\sqrt{2} + \sqrt{5}$. Тогда гипотенуза у этого треугольника равна $2 + \sqrt{10}$.

2) Используя отрезок длиной 1 и отрезок, полученный в 1), получим отрезок длиной $\sqrt{10}$.

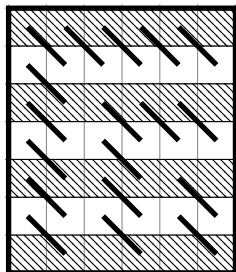
3) Построим прямоугольный треугольник с катетом 2 и гипотенузой $\sqrt{10}$. Тогда второй катет равен $\sqrt{6}$.



2. Дана клетчатая доска 7×6 . Нёд — фигура из двух клеток, имеющих одну общую вершину (на рисунке два нёда — белый и заштрихованный). Какое максимальное количество нёдов по непересекающимся клеткам можно вырезать из этой доски?

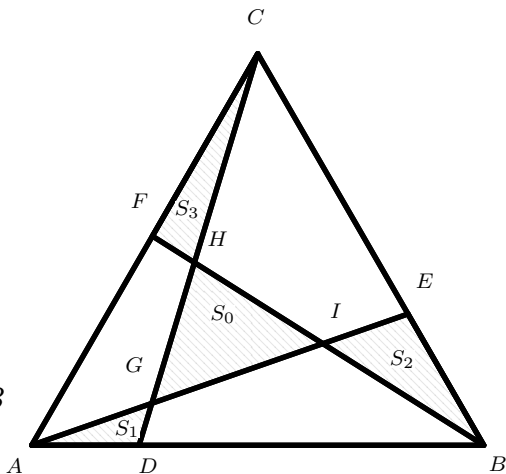
Решение.

Покрасим доску 7×6 так, как показано на рисунке. Тогда каждый нёд будет занимать одну закрашенную и одну незакрашенную клетку. Значит, количество нёдов, которые можно уместить на эту доску — не больше 18. Пример показан на том же рисунке.



3. В правильном треугольнике ABC проведены отрезки AE , BF , CD так, как показано на рисунке. Площади заштрихованных треугольников равны S_0 , S_1 , S_2 , S_3 , причем $S_0 = S_1 + S_2 + S_3$, $S = 5S_0$, где S — площадь треугольника ABC . Докажите, что $BC = BE + CF + AD$.

Решение. Обозначим площади четырехугольников $CHIE$, $DGIB$ и $GHFA$ как a , c и b соответственно. Тогда



$$\frac{S_{ABE}}{S} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{S_1 + c + S_2}{S} = \frac{BE}{BC};$$

$$\frac{S_{FCB}}{S} = \frac{CF}{AC} \Rightarrow \frac{a + S_2 + S_3}{S} = \frac{CF}{BC};$$

$$\frac{S_{ACD}}{S} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{S_3 + b + S_1}{S} = \frac{AD}{BC}.$$

Поэтому

$$\frac{2S_1 + 2S_2 + 2S_3 + a + b + c}{S} = \frac{BE + CF + AD}{BC} \Rightarrow 1 = \frac{BE + CF + AD}{BC}.$$

4. Функция $f(x)$ такова, что для всех значений x выполняется равенство $f(x+1) - f(x) = x+1$. Известно, что $f(0) = 4$. Найдите $f(62)$.

Решение. Подставим в формулу $f(x+1) - f(x) = x+1$ вместо x числа $0, 1, 2, \dots, 60, 61$. Получим $f(1) - f(0) = 0+1$, $f(2) - f(1) = 1+1$, $f(3) - f(2) = 2+1, \dots, f(62) - f(61) = 62+1$.

Сложим почленно полученные равенства, получим

$$f(62) - f(0) = 1 + 2 + 3 + \dots + 63 = 32 \cdot 63 = 2016.$$

Значит, $f(62) = 2020$.

5. Прибор должен из многочлена $2020x^4 + x + 1$, меняя его коэффициенты, получить за несколько шагов многочлен $x^4 + 2020x + 1$ так, чтобы ни на одном из шагов не получался многочлен с целыми корнями. Сумеет ли этот прибор выполнить преобразования, если он умеет делать за один шаг только одну из двух операций: **1)** изменять (увеличить или

уменьшить) на 1 какой-либо один (на каждом шаге любой) коэффициент многочлена; **2)** изменять одновременно на единицу какие-либо два (на каждом шаге любые) коэффициента многочлена?

Решение. Пусть $P(x) = 2020x^4 + x + 1$ и $Q(x) = x^4 + 2020x + 1$. Имеем, $P(-1) = 2020 > 0$ и $Q(-1) = -2020 < 0$. Применяя операцию **1)**, прибор изменяет значение трехчлена в точке -1 на ± 1 , поэтому один из промежуточных трехчленов будет иметь корень -1 . Применяя операцию **2)**, прибор или не меняет значение в точке -1 , или изменяет его на ± 2 , поэтому один из трехчленов будет иметь корень -1 , так как $P(-1)$ и $Q(-1)$ — четные числа. Значит, такое невозможно.